МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на четвёртый курс

1. 5 Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = (y, z^2, x)$ по контуру

$$L = \left\{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = x^2 + y^2,\; z - 4 = 2x + 4y \, \right\},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0,0,1)$. Система координат декартова прямоугольная.

2. 5 Решить задачу Коши

$$2y''(x) = \big(y'(x)\big)^2 + y(x), \quad x > 0,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$$

3. 5 Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. 5 Решить задачу Коши

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

$$u = yz - 1 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

5. 5 Решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x,y,z) = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 < \pi^2,$$

$$u(x,y,z) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \pi^2.$$

ОТВЕТЫ

для поступающих на четвёртый курс

1. ⑤ Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = (y, z^2, x)$ по контуру

$$L = \left\{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2, \ z - 4 = 2x + 4y \ \right\},$$

ориентированному положительно относительно вектора $(0,0,1)$. Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $531\,\pi$. Имеем $\operatorname{rot}\vec{F} = (-2z, -1, -1)$, по формуле Стокса

$$\oint\limits_L \left(\vec{F}, \vec{d\ell}\right) = \iint\limits_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n}\right)\, dS,$$

где $S = \{ \ (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 9, \ z - 4 - 2x - 4y = 0 \ \}$, $\vec{n} = (-2,-4,1)/\sqrt{21}$, $dS = \sqrt{21}\, dx\, dy$, откуда

$$\oint\limits_L \left(\vec{F}, \vec{d\ell}\right) = \iint\limits_{(x-1)^2+(y-2)^2<9} (4z+3)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(x-1)^2+(y-2)^2<9} (19 + 8x + 16y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{(x-1)^2+(y-2)^2<9} (59 + 8(x-1) + 16(y-2))\, dx\, dy = 59 \cdot \pi \cdot 9 = 531\,\pi.$$

Инструкция: Вычислен ротор $\vec{F}$ — 1 очко, записана формула Стокса с явным указанием поверхности и поля единичных нормалей — 1 очко, поверхностный интеграл представлен двойным интегралом Римана — 1 очко.

2. ⑤ Решить задачу Коши

$$2y''(x) = \big(y'(x)\big)^2 + y(x), \quad x > 0,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0.$$

Ответ: $y(x) = -1 - \frac{x^2}{4}$, $x \ge 0$. Замена $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = z(y)z'(y)$ и

$$2y''(x) = 2z(y)z'(y) = (z^2(y))' = z^2(y) + y, \quad z(-1) = 0.$$

Замена $v(y) = z^2(y)$, тогда

$$v'(y) = v(y) + y, \quad v(-1) = 0, \quad \Rightarrow \quad v(y) = -1 - y = (y'(x))^2.$$

Получаем

$$y'(x) = \pm\sqrt{-1 - y(x)}, \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{-1 - y(x)} = \pm x + C, \quad x \geq 0.$$

Условие $y(0) = -1$ влечёт $C = 0$, откуда

$$\pm x = -2\sqrt{-1 - y(x)} \leq 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x = -2\sqrt{-1 - y(x)}.$$

Следовательно, $y(x) = -1 - \frac{x^2}{4}$, $x \geq 0$.

Инструкция: понижен порядок уравнения — 1 очко, найдена $y'(x)$ — 2 очка.

3.5 Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ix + 2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $F[f](y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \begin{cases} e^{-2y}, & y > 0, \\ e^{y}, & y < 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$ Заметим, что f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Следовательно, по определению преобразования Фурье, имеем

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{(x-i)(x+2i)}\,dx.$$

При фиксированном $y \neq 0$ рассмотрим комплексную функцию

$$g(z) = \frac{e^{-iyz}}{(z-i)(z+2i)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда, применяя лемму Жордана, находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{rl} -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=-2i} g(z), & y > 0, \\ \\ 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=i} g(z), & y < 0 \end{array} \right\} = 2\pi i \begin{cases} -\frac{e^{-2y}}{-4i+i}, & y > 0, \\ \\ \frac{e^{y}}{2i+i}, & y < 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$F[f](y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \begin{cases} e^{-2y}, & y > 0, \\ e^{y}, & y < 0. \end{cases}$$

Так как f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}$, поэтому

$$F[f](0) = \lim_{y \to 0} F[f](y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}.$$

Инструкция: найдено значение пребразования Фурье при положительном или отрицательном аргументе — 2 очка, найдено значение преобразования Фурье в нуле — 1 очко.

4. ⑤ Решить задачу Коши

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} + 2x\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

$$u = yz - 1 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Ответ: первые интегралы $U_1 = xy$ и $U_2 = z - \frac{x}{y}$, решение $u = U_1U_2 = xyz - x^2$. Автономная система имеет вид

$$\frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{2x}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

Отсюда находим

$$xy = C_1, \quad -\frac{dy}{y^2} = \frac{y\,dz}{2C_1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2y^2} = \frac{z}{2C_1} + C_2, \quad \Rightarrow \quad z - \frac{C_1}{y^2} = z - \frac{x}{y} = -2C_1C_2.$$

Следовательно, первые интегралы имеют вид

$$U_1 = xy, \quad U_2 = z - \frac{x}{y},$$

и общее решение уравнения $u = \Phi(U_1, U_2)$ для произвольной непрерывно дифференцируемой функции Φ. При $x = 1$ имеем

$$u = yz - 1, \quad U_1 = y, \quad U_2 = z - \frac{1}{y} = \frac{yz - 1}{y} = \frac{u}{U_1}, \quad \Rightarrow \quad u = U_1U_2.$$

Инструкция: за каждый найденный первый интеграл — 2 очка.

5. ⑤ Решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y, z) = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 < \pi^2,$$

$$u(x, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \pi^2.$$

Ответ: $u = -\sin r + \frac{2(1-\cos r)}{r} - \frac{4}{\pi}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Очевидно, что $u = u(r)$, поэтому при $0 < r < \pi$ имеем

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru)''_{rr} = \sin r \quad \Leftrightarrow \quad ru = -r\sin r - 2\cos r + Cr + D.$$

Следовательно,

$$u = -\sin r + \frac{D - 2\cos r}{r} + C, \quad 0 < r < \pi.$$

Условие гладкости функции $u(r)$ при $r = 0$ влечёт $D = 2$. Граничное условие Дирихле $u(\pi) = 0$ влечёт $C = -\frac{4}{\pi}$.

Инструкция: отмечено, что решение $u = u(r)$ — 1 очко, на функцию $u(r)$ выписан обыкновенный дифф.ур. второго порядка — 1 очко, найдено общее решение этого дифф.ур. — 1 очко, найдена одна из двух констант — 1 очко.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–1	НЕУД. (1)
2–3	НЕУД. (2)
4–5	УДОВЛ. (3)
6–7	УДОВЛ. (4)
8–10	ХОР. (5)
11–13	ХОР. (6)
14–16	ХОР. (7)
17–19	ОТЛ. (8)
20–22	ОТЛ. (9)
23–25	ОТЛ. (10)